CORRECCIÓN DEL EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN

1. a) Para hacer el cambio de unidades debemos multiplicar por 1000, para pasar de km a m, y multiplicar el denominador (por tanto, dividir) por 3600 para pasar de horas a segundos:

$$v = 100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\frac{1000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 27{,}8\,\text{m/s}$$

b) Si ponemos la referencia en el punto en el que empieza a frenar y tomamos como sentido positivo el del avance del coche, las ecuaciones de ese movimiento son:

$$e = 0 + 27{,}8\,t + \tfrac{1}{2}\,a_t\,t^2$$
$$v = 27{,}8 + a_t\,t$$

En las anteriores ecuaciones no conocemos una de las constantes del movimiento: la aceleración tangencial. Pero conocemos una pareja de valores de las variables posición y rapidez: en la posición 100 m la rapidez es nula. Con estos dos valores podemos plantear un sistema de ecuaciones con dos incognitas: la aceleración tangencial y el tiempo que tarda en pararse el coche.

$$100 = 27{,}8\,t + \tfrac{1}{2}\,a_t t^2$$
$$0 = 27{,}8 + a_t t$$

Resolviendo el sistema obtenemos los siguientes valores:

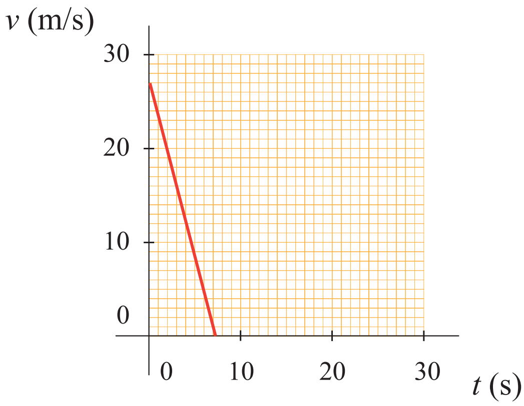
$$a_t = -\,3{,}9\ \text{m/s}^2;\ t = 7{,}2\ \text{s}$$

De este modo las ecuaciones serían:

$$e = 27{,}8\,t - 1{,}9\,t^2$$
$$v = 27{,}8 - 3{,}9\,t$$

c) El tiempo que tarda en detenerse se ha calculado ya en el apartado anterior.

La representación gráfica en el intervalo t (0, 10) s se recoge en el dibujo adjunto. Los valores negativos de la rapidez significarían que el coche se mueve en sentido contrario, lo que no se corresponde con el problema físico, pues el movimiento del coche termina cuando se para. Eso ocurre para v = 0, que corresponde en la gráfica al instante en el que la línea corta al eje de abcisas. Vemos que es algo más de 7 s, coincidiendo con el cálculo analítico que se había hecho a partir de las ecuaciones.



d) En recorrer los 50 primeros metros tarda menos de la mitad del tiempo que tarda en recorrer los 100 m, ya que su rapidez es mayor al principio que al final.

Para calcular el tiempo que tarda en recorrer los primeros 50 metros, se sustituye en la ecuación de la posición el valor 50 que corresponde a cuando ha recorrido 50 metros. Se obtiene la ecuación:

$$50 = 27{,}8\,t - 1{,}93\,t^2$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos el instante en el que se encuentra en la posición 50 m. Las soluciones de la ecuación son 2,1 s y 12,3 s. El valor 12,3 s no tiene significado físico pues el coche se detuvo a los 7,2 s. (El valor 12,3 s correspondería a un móvil con las características descritas pero que al llegar a $v = 0$ no se detuviese sino que comenzara a moverse en sentido contrario, pasando de nuevo por la posición 50 m en el instante 12,3).

Por lo tanto en recorrer los primeros 50 metros ha tardado: Δt = 2,1 – 0 = 2,1 s. El tiempo que tarda en recorrer los últimos 50 m lo podemos calcular por diferencia entre los instantes en los que se encuentra en la posición 100 y en la posición 50 m.

$$\Delta t = 7{,}2 - 2{,}1 = 5{,}1\ \text{s}$$

2. a) Incorrecto. Sólo puede calcularse así en el caso de que el movimiento sea uniforme. También puede calcularse así la rapidez media.

b) Incorrecto. La aceleración tangencial es, en el caso de un movimiento uniformemente acelerado, el cociente entre la variación de la rapidez y el tiempo empleado.

c) Incorrecto. La distancia recorrida es el valor absoluto de la diferencia entre la posición inicial y la final sólo cuando el movimiento sea siempre en el mismo sentido.

d) Incorrecto. La aceleración no está relacionada con la rapidez sino con la variación de la rapidez. Ejemplo, la rapidez es nula en el punto más alto de la trayectoria de un cuerpo lanzado verticalmente, mientras que la aceleración en ese punto es de 9,8 m/s^2.

e) Incorrecto. La distancia recorrida depende además de la aceleración y del tiempo que dure el movimiento, de la velocidad inicial que llevaba el cuerpo al empezar a contar el tiempo.

3. Si colocamos la referencia en el centro de gravedad de Jordan antes del salto y tomamos positivo el sentido hacia arriba, la ecuación del movimiento supuesto vertical sería: $e = 0 + v_0 t + ½(–9,8)t^2$ y $v = v_0 + (–9,8)t$:

$$e = v_0 t - 4{,}9\, t^2; \quad v = v_0 - 9{,}8\, t$$

Cuando llegue a la posición 1,2 m la rapidez es nula y tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas: la rapidez inicial con la que Jordan se eleva y el tiempo que tarda en llegar arriba.

$$1{,}2 = v_0 t - 4{,}9\, t^2; \quad 0 = v_0 - 9{,}8\, t$$

Resolviendo obtenemos los siguientes valores: $v_0 = 4{,}8$ m (se escoge la solución positiva dado que el avance se produce en el sentido positivo) y $t = 0{,}49$ s.

Si no tenemos en cuenta el posible rozamiento del cuerpo de Jordan con el aire, tardará lo mismo en subir que en bajar, por lo que el tiempo que está en el aire será el doble de lo tarda en subir: 0,98 s. Podemos comprobarlo resolviendo la ecuación del movimiento para $e = 0$, posición que ocupa cuando sale hacia arriba y cuando llega abajo:

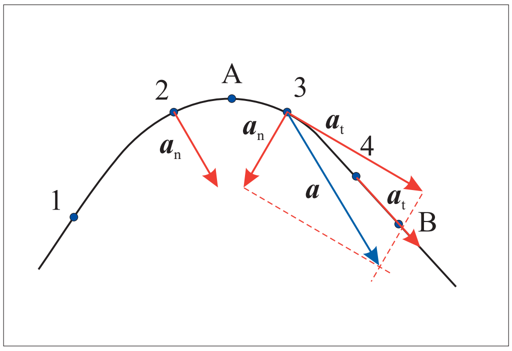
$$0 = 4{,}8\, t - 4{,}9\, t^2; \quad t = 0 \text{ (posición inicial) ó } 4{,}8 - 4{,}9\, t = 0, \text{ de donde } t = 0{,}98 \text{ s}$$

El comentario que se refiere a quedar suspendido en el aire «venciendo la ley de gravitación» demuestra la total ignorancia de quien lo hace ya que no se tiene conocimiento de algo que quede suspendido en el aire salvo que actúen otro tipo de fuerzas (eléctricas, rozamientos...). Tampoco tiene sentido decir que «se vence» a una ley; las leyes de la física, simplemente se cumplen dentro de un determinado campo de validez. Otra cuestión sería pensar en otra fuerza que equilibrara en alguna medida a la de atracción de la Tierra, es decir, una fuerza que se ejerciera sobre el deportista hacia arriba, pero ¿quién la hace?, ¿el comentarista deportivo?

4. En el punto 1 la rapidez es constante, no hay aceleración tangencial, y la trayectoria rectilínea por lo que no hay aceleración normal.

En el punto 2 la rapidez es constante por lo que no hay aceleración tangencial. Como la trayectoria es curvilínea hay aceleración normal de valor 1 m/s^2, que será también el valor del módulo de la aceleración total.

En el punto 3 se está produciendo un aumento de rapidez, por lo que hay aceleración tangencial. Su valor es (28–20)/4 = 2 m/s^2. Como la trayectoria es curvilínea también hay aceleración normal. Para calcularla debemos conocer la rapidez en el punto 3. Para ello, sabiendo que tarda 1 segundo desde el punto A hasta el punto 3, la rapidez habrá aumentado en 2 m/s, por lo que será 22 m/s. Eso supone que la aceleración normal será de 1,2 m/s^2.

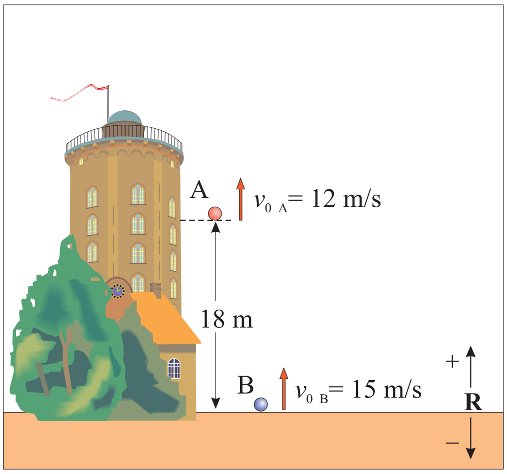


El módulo de la aceleración total lo hallamos mediante:

$$a = \sqrt{2^2 + 1{,}2^2} = 2{,}3 \text{ m/s}^2$$

En el punto 4 sólo habrá aceleración tangencial. Su valor es de 2 m/s^2, calculado previamente. En la figura se representan las aceleraciones en cada punto.

5. Para saber si se encuentran ambos objetos en el aire será necesario escribir las ecuaciones del movimiento de ambos móviles, escritas en función de un mismo punto de referencia y de un mismo criterio de signos. Si escogemos como punto de referencia el suelo y sentido positivo hacia arriba tal como se refleja en el dibujo adjunto, las ecuaciones de ambos móviles son:



móvil A: $e_A = 18 + 12\,t - 4{,}9\,t^2$; $v_A = 12 - 9{,}8\,t$

móvil B: $e_B = 0 + 15\,t - 4{,}9\,t^2$; $v_B = 15 - 9{,}8\,t$

Si se encontraran en el aire, ambos estarían en la misma posición, es decir, se encuentran si $e_A = e_B$ en algún punto antes de llegar al suelo:

$$18 + 12\,t - 4{,}9\,t^2 = 15\,t - 4{,}9\,t^2$$

Simplificando obtenemos: $18 + 12\,t = 15\,t$

Y despejando: $t = 6$ s

La posición buscada es: $e_B = 15 \cdot 6 - 4{,}9 \cdot 6^2 = -86{,}4$ m.

Este resultado es físicamente imposible, nos indica que se encuentran a 86,4 m por debajo del suelo que es donde hemos colocado la referencia. La solución del problema es que no se encuentran, es decir que el objeto B llega antes de que lo alcance el objeto A al suelo.

Para saber cuál llega antes al suelo calcularemos los instantes en los que la posición de cada uno es cero.

A) $0 = 18 + 12\,t - 4{,}9\,t^2$; $t = 3{,}5$ s

B) $0 = 15\,t - 4{,}9\,t^2$; $t = 3{,}1$ s

Para el objeto A obtenemos dos soluciones, una de ellas negativa por lo que no tiene sentido físico. Para el B la primera solución es $t = 0$, que es el momento inicial, y la segunda será cuando de nuevo llega al suelo. Puede observarse que, efectivamente el objeto B llega antes que el A, por lo que no se encuentran en ninguna posición durante el movimiento.

Las rapideces serán:

$$v_A = 12 - 9{,}8 \cdot 3{,}5 = -22{,}3 \text{ m/s}$$
$$v_B = 15 - 9{,}8 \cdot 3{,}1 = -15{,}38 \text{ m/s}$$

6. a) La aguja del reloj que marca las horas da una vuelta completa cada 12 horas. Por lo tanto, la rapidez angular en s^{-1} y en rpm es:

$$\omega = \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}\ ; \qquad \omega = \frac{1}{12 \cdot 60} = 1{,}39 \cdot 10^{-3}\ \text{rpm}$$

b) Dado que se trata de un movimiento circular uniforme el ángulo recorrido en media hora será para cualquier punto de la aguja:

$$\Delta\phi = \omega\,\Delta t = 1{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot 1800 = 0{,}26 \text{ rad}$$

Para el extremo de la aguja ($r = 0{,}02$ m), el arco recorrido es:

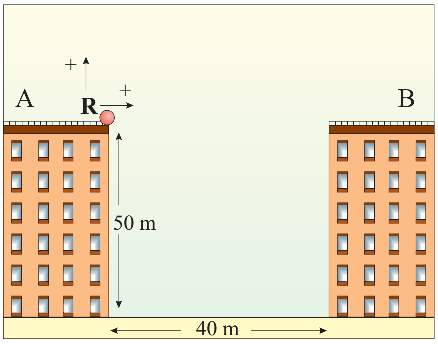
$$\Delta e = \Delta\phi\ \ r = 0{,}26 \cdot 0{,}02 = 5{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Para el punto central de la aguja ($r = 0{,}01$ m), el arco recorrido es:

$$\Delta e = \Delta\phi\ \ r = 0{,}26 \cdot 0{,}01 = 2{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Se observa como disminuyen las magnitudes lineales, rapidez y distancia, a medida que nos acercamos al eje de giro, mientras que las magnitudes angulares permanecen iguales. Es la razón de introducir las magnitudes angulares ya que simplifican el análisis de los movinmientos circulares.

7. a) Tomamos como punto de referencia el punto desde donde se lanza la pelota y como criterio de signos, positivo hacia arriba y hacia la derecha. De acuerdo con ello las ecuaciones del movimiento de la pelota son:



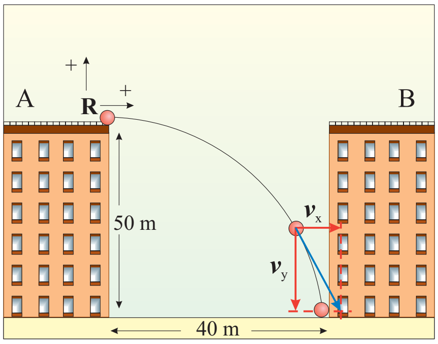
Direción vertical (movimiento uniformemente acelerado):

$$y = -4{,}9\ t^2;\ v_y = -9{,}8\ t$$

Dirección horizontal: movimiento uniforme: $x = v_0\,t$; $v_x = v_0$

La pelota recorrerá una distancia horizontal, que tal como hemos elegido el punto de referencia es igual a x, que será igual al producto de la velocidad horizontal y del tiempo que está la pelota en el aire $x = v_x t$. El tiempo máximo que está la bola cayendo es el que tarda en llegar al suelo, es decir, el que tarda en que la posición vertical sea $y = -50$ m.

La ecuación $-50 = -4{,}9\,t^2$, tiene dos soluciones, $t = \pm 3{,}2$ s, de la que sólo es solución del problema físico la positiva. Para que la pelota golpee al edificio de enfrente será necesario que en ese tiempo haya recorrido horizontalmente como mínimo 40 m. Es decir que: $v_0 \cdot 3{,}19 \geq 40$. Eso supone que la velocidad horizontal con la que se lance a la pelota debe ser mayor que 12,5 m/s.



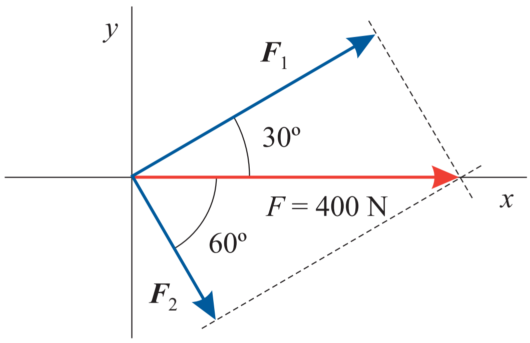
b) b) Las componentes horizontal y vertical de la velocidad para $t = 2$ s son: $v_x = 12{,}5$ m/s; $v_y = -9{,}8 \cdot 2 = -19{,}6$ m/s

El módulo de la velocidad es $v = \sqrt{12{,}5^2 + (-19{,}6)^2} = 23{,}2$ m/s

A la derecha se encuentra el dibujo que representa la velocidad.

c) Si dejamos caer otra pelota desde el edificio B, al mismo tiempo y a la misma altura, ambas estarán a igual distancia del suelo en cualquier instante. Esto es así porque tienen la misma rapidez inicial vertical (nula) y la aceleración de caída también es la misma (9,8 m/s^2). El que lleven una velocidad horizontal distinta, no influye en la componente vertical de su velocidad (principio de independencia de los movimientos de Galileo).

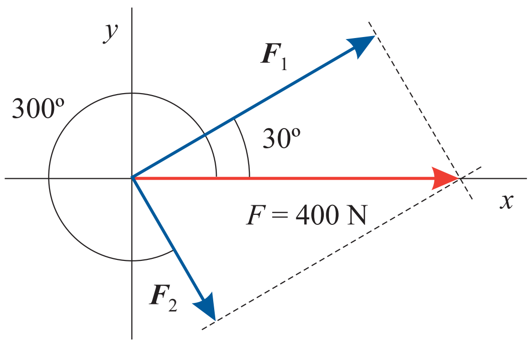
8. Se trata de descomponer una fuerza de 400 N en dos, cuyas direcciones están fijadas, de forma que la suma de ambas sea igual a la fuerza original. Si se dibuja la fuerza de 400 N de forma que su dirección coincida con el eje *X*, y se trazan por su extremo líneas paralelas a las direcciones de las cuerdas, podemos observar que se obtienen dos segmentos orientados que llamaremos $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$. Se debe cumplir que:



$$\left.\begin{array}{l} F_1 \cos 30 + F_2 \cos 60 = 400 \\ F_1 \operatorname{sen} 30 - F_2 \operatorname{sen} 60 = 0 \end{array}\right\} \quad F_1 = 346\text{ N}; \qquad F_2 = 200\text{ N}$$

Por lo tanto, las fuerzas que tiene que hacer cada uno son 346 N y 200 N.

Resolución matemática más formal:



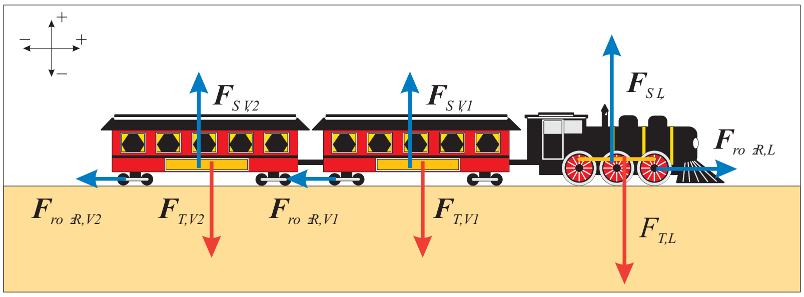
Si medimos los dos ángulos a partir del eje *X* en sentido contrario al giro de las agujas del reloj, el ángulo que forma el segmento orientado $\boldsymbol{F}_2$ es de 300º. En ese caso, las ecuaciones que podemos escribir son:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \cos 30 + F_2 \cos 300 = 400 \\ F_1 \operatorname{sen} 30 + F_2 \operatorname{sen} 300 = 0 \end{array}\right\}$$

Lógicamente el resultado es el mismo. La ventaja del segundo procedimiento es que nos despreocupamos del signo de cada componente, ya que ese signo viene incluido en el valor del seno o coseno del ángulo.

9. En el juego del baloncesto son muy frecuentes los saltos. Por lo tanto, los jugadores tienen que acelerar muchas veces, tanto al elevarse como al caer. La variación del momento lineal es la misma se juegue en cancha de cemento o en cancha de madera pues el jugador llega al suelo con una velocidad y al final tiene que estar parado pero, al ser la madera más flexible que el cemento, el tiempo que tarda en frenar el jugador o jugadora al caer al suelo es mayor cuando lo hace sobre madera, y por lo tanto la fuerza que el suelo ejerce sobre la persona es menor. Eso hace que el esfuerzo que deben hacer las articulaciones de tobillos y rodillas sea menor, y por lo tanto, menor el riesgo de lesiones.

10. a) En el dibujo se representan las fuerzas externas que se ejercen sobre el sistema:



* La que ejerce la Tierra sobre cada una de las partes del sistema cuyo valor es de $-392\,000\,\boldsymbol{j}$ N sobre la locomotora y $-294\,000\,\boldsymbol{j}$ N sobre cada vagón.

* Las que ejerce el suelo de igual valor que las anteriores puesto que hay equilibrio en la dirección vertical.

* El rozamiento del raíl sobre las ruedas motrices de la locomotora ($\boldsymbol{F}_{\text{roz R,L}}$).

* El rozamiento del suelo sobre los vagones, que vale $-6000\,\boldsymbol{i}$ N sobre cada vagón.

* Se podría tener en cuenta el rozamiento del aire con la locomotora, en sentido contrario a la velocidad de ésta, pero por simplificar no lo consideraremos.

Puesto que sólo hay aceleración en la dirección horizontal, la suma de todas las fuerzas exteriores sólo tiene componente horizontal. Su valor puede calcularse aplicando la segunda ley de la dinámica:

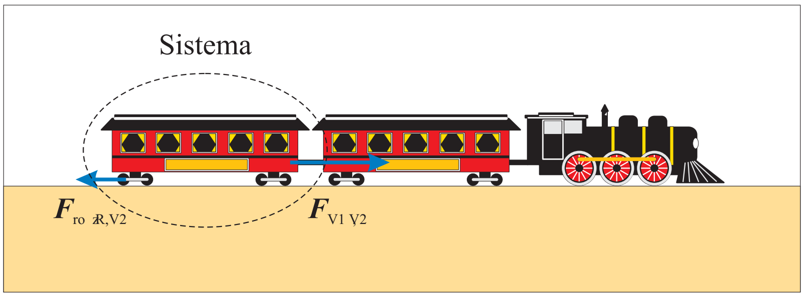
$$\Sigma\boldsymbol{F} = \Sigma\boldsymbol{F}_x = m\boldsymbol{a} = 100000 \cdot 0{,}2\,\boldsymbol{i} = 20000\,\boldsymbol{i}\text{ N.}$$

b) Serán fuerzas internas las que se ejercen entre sí los dos vagones o el primer vagón y la locomotora.

La fuerza que hace la locomotora sobre el primer vagón es interna si el sistema que consideramos es el tren completo, pero si el sistema considerado es sólo el primer vagón, la locomotora es un cuerpo exterior al sistema y por tanto, la fuerza que ejerce sobre el vagón es exterior.

La suma de las fuerzas internas que actún en el sistema es nula, ya que al realizarse las interacciones dentro del sistema, según la tercera ley existirán parejas de fuerzas iguales y de sentido opuesto para representar cada interacción, y la suma de cada pareja será nula.

c) Para conocer la fuerza que hace el primer vagón sobre el segundo debemos tomar como sistema únicamente al segundo vagón. De esta forma podremos considerar dicha fuerza como exterior al sistema.



Si aplicamos la segunda ley al segundo vagón teniendo en cuenta que la suma de las fuerzas en eje vertical es nula, tendremos:

$$\Sigma\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{V1,V2} + (-6000\,\boldsymbol{i}) = 30000 \cdot 0{,}2\,\boldsymbol{i} = 6000\,\boldsymbol{i}\text{N}$$

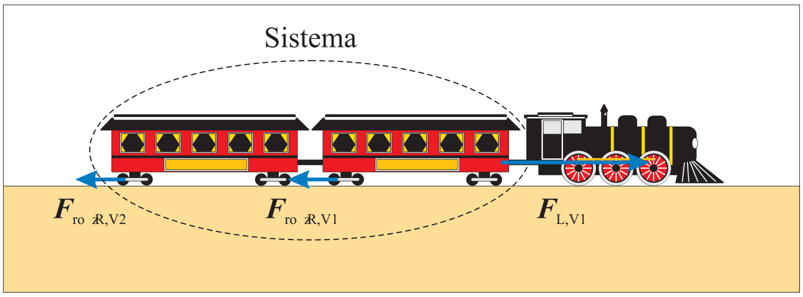
$$\boldsymbol{F}_{V1,V2} = 12\,000\,\boldsymbol{i}\text{ N}$$

d) Ahora el sistema estará formado por los dos vagones; así, la fuerza que hace la locomotora será exterior al sistema.

$$\Sigma\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{L,V1} + 2\,(-6000\,\boldsymbol{i}) = 60000 \cdot 0{,}2\,\boldsymbol{i} = 12\,000\,\boldsymbol{i}\text{ N}$$

$$\boldsymbol{F}_{L,V1} = 24\,000\,\boldsymbol{i}\text{ N}$$

Observa que la masa del sistema es la que corresponde a los dos vagones y que la fuerza sale mayor que la anterior dado que la locomotora tira de los dos vagones mientras que el primer vagón sólo tira de uno.



e) La suma de todas las fuerzas que actúan sobre el primer vagón (ahora el sistema será este vagón) es:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{V2,V1} + \boldsymbol{F}_{L,V1} + \boldsymbol{F}_{roz\ R,V1} = -12000\ \boldsymbol{i} + 24000\ \boldsymbol{i} + (-6000\ \boldsymbol{i}) = 6000\ \boldsymbol{i}\ \text{N}$$

El impulso será:

$$\Sigma \boldsymbol{F}\ \Delta t = 6000\ \boldsymbol{i} \cdot 6 = 36000\ \boldsymbol{i}\ \text{N s}$$

La variación del momento lineal es igual al impulso en ese intervalo de tiempo: $\Delta \boldsymbol{p} = 36000\ \boldsymbol{i}$ kg m/s.

La velocidad final será:

$$\Delta \boldsymbol{p} = m\ \Delta \boldsymbol{v}\ ;\ \Delta \boldsymbol{v} = 36000\ \boldsymbol{i} / 30000 = 1{,}2\ \boldsymbol{i}\ \text{m/s}$$

$$\boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0 = 1{,}2\ \boldsymbol{i} + 8\ \boldsymbol{i} = 9{,}2\ \boldsymbol{i}\ \text{m/s}$$

f) En este apartado suponemos que el tren circula con rapidez constante.

Para calcular la fuerza que ejerce la locomotora sobre el primer vagón procedemos como en d) pero teniendo en cuenta que la aceleración es nula. Por lo tanto, si suponemos que se mantienen las fuerzas de rozamiento podemos escribir:

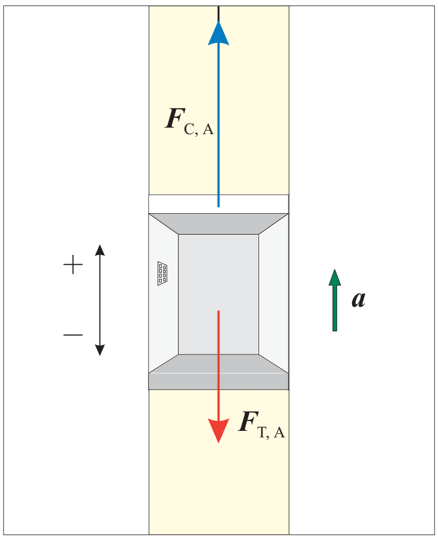
$$\boldsymbol{F}_{L,V1} - 12\,000\ \boldsymbol{i} = 0\ \text{N};\quad \boldsymbol{F}_{L,V1} = 12\,000\ \boldsymbol{i}\ \text{N}$$

Para calcular el impulso que se ejerce sobre el primer vagón durante 10 s tendremos en cuanta que puesto que su aceleración es nula, la suma de las fuerzas que actúan sobre el primer vagón también será nula. Por lo tanto, el impulso total será nulo.

Ese resultado es coherente con el hecho de que al ser la velocidad constante, y la masa de vagón también, no hay variación del momento lineal, es decir $\Delta \boldsymbol{p} = 0$.

La velocidad final del mismo, será igual que la inicial, es decir, 20 $\boldsymbol{i}$ m/s.

11. Las fuerzas que actúan sobre el ascensor, despreciando el rozamiento, son dos: la fuerza que hace el cable, dirigida hacia arriba, y la fuerza con la que la Tierra atrae al ascensor, cuyo valor es siempre el mismo y que podemos considerar de 12000 N. Si tomamos como criterio de signos positivo hacia arriba y negativo hacia abajo, escribimos la segunda ley:



$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}_{c,a} - 12000\,\boldsymbol{j}}{1200}\ ;\qquad \boldsymbol{F}_{c,a} = 1200\ \boldsymbol{a} + 12000\,\boldsymbol{j}\ \text{N}$$

a) Cuando el ascensor arranca para subir, aumenta su rapidez de 0 a 1 m/s en dos segundos, la aceleración tangencial es 0,5 $\boldsymbol{j}$ m/s^2, que sustituida en la ecuación anterior permite calcular la fuerza:

$$\boldsymbol{F}_{c,a} = 12\,600\,\boldsymbol{j}\ \text{N}$$

Por tanto la fuerza que hace el cable es mayor que el peso del ascensor.

b) Cuando el ascensor sube con rapidez constante, la aceleración es nula y la fuerza que debe hacer el cable es de 12 000 $\boldsymbol{j}$ N igual al peso del ascensor.

c) Cuando el ascensor se detiene en 1 segundo, la aceleración tangencial es $-\boldsymbol{j}$ m/s^2, por tanto la fuerza que debe hacer el cable durante ese segundo es de 10 800 $\boldsymbol{j}$ N, menor que el peso del ascensor.

d) El peligro de que se rompa el cable es mayor en la etapa en la que debe realizar una fuerza mayor. Es la etapa a), en la que debe subir al ascensor con aceleración.

e) Dado que no tiene siempre la misma aceleración, no se puede usar la misma ecuación del movimiento para las tres etapas:

etapa a) $d_1 = ½ \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 = 1$ m

etapa b) $d_2 = 1 \cdot 12 = 12$ m

etapa c) $d_3 = 1{\cdot}1 - ½ \cdot 1 \cdot 1^2 = 0{,}5$ m.

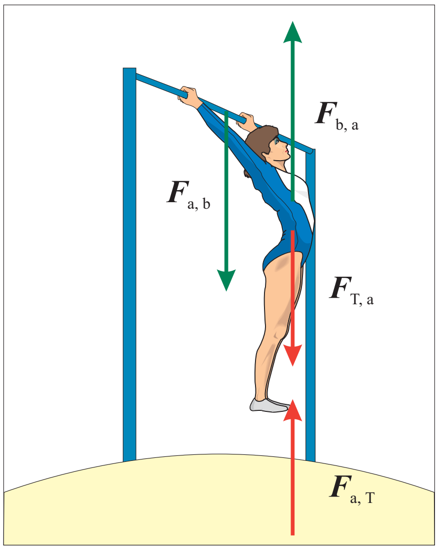
Luego la distancia total recorrida es $d = 13{,}5$ metros.

12. Si consideramos despreciables las fuerzas de rozamiento que actúan sobre ambas vagonetas, la suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre el conjunto del sistema será nula. Por lo tanto, podemos aplicar el principio de conservación del momento lineal. Dado que antes de soltar el muelle, el momento lineal de todo el sistema es nulo, también lo debe ser después de soltar el muelle. Si tomamos como positivo el sentido hacia la derecha podemos escribir:

$$0 = 6\,\boldsymbol{v}_A + 10\,(-12\,\boldsymbol{i}); \quad \boldsymbol{v}_A = 120/6\,\boldsymbol{i} = 20\,\boldsymbol{i} \text{ m/s}$$

El resultado es razonable pues el cuerpo de menor masa sale con velocidad mayor. Además, tal como hemos escogido el criterio de signos, la velocidad de la vagoneta de 6 kg tenía que ser positiva.

13. Tomamos sentido positivo hacia arriba y sentido negativo hacia abajo. Sobre la atleta actúa la atracción de la Tierra, 60 $(-9{,}8\boldsymbol{j}) = -588\,\boldsymbol{j}$ N, negativa según el criterio de signos. Además actúa la fuerza que hace la barra sobre la atleta $\boldsymbol{F}_{b,a}$. Dado que la atleta, al girar alrededor de la barra, tiene una aceleración normal igual a $2^2/1{,}25 = 3{,}2$ m/s^2, podremos escribir en el punto más bajo de la trayectoria:



$$3{,}2\,\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{F}_{b,a} - 588\,\boldsymbol{j}}{60}; \qquad \boldsymbol{F}_{b,a} = 780\,\boldsymbol{j} \text{ N}$$

El signo positivo indica que esa fuerza está dirigida verticalmente hacia arriba. Aunque en el dibujo se ha representado en el centro de masas de la atleta, en realidad esa fuerza la ejerce la barra sobre las manos de la atleta.

b) La fuerza que hacen las manos del atleta sobre la barra será igual a 780 N, sólo que ahora estará dirigida hacia abajo.

c) En el dibujo se han representado dos interacciones mediante sus correspondientes parejas: la interacción entre el planeta Tierra y la atleta y la interacción entre la barra y la atleta.

14. a) Las fuerzas que actúan sobre el esquiador están representadas en la figura y son: la normal que hace la nieve, la de rozamiento con la nieve y el peso cuyo módulo es:

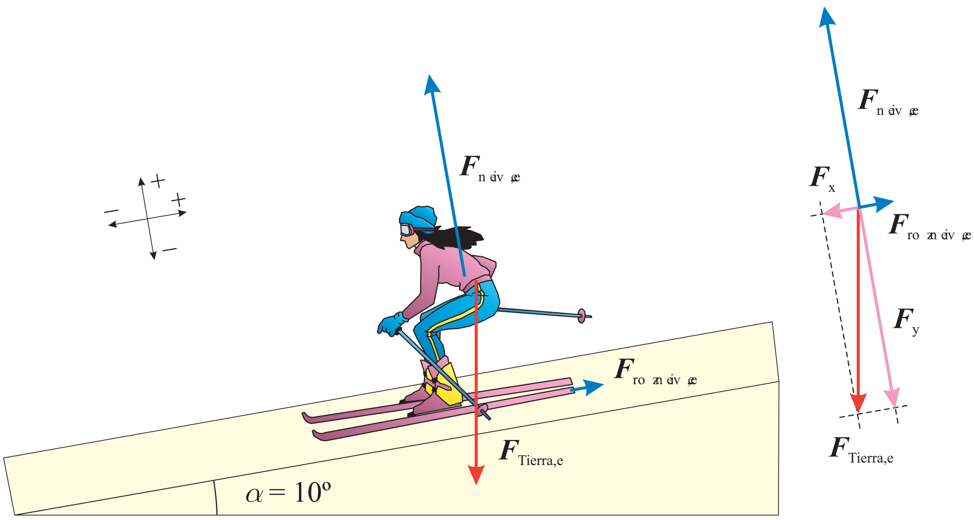
$$F_{\text{Tierra,e}} = 70 \cdot 9{,}8 = 686 \text{ N}$$

Para calcular la suma de las fuerzas que actúan sobre el esquiador expresamos esas fuerzas en función de un sistema de referencia. Podemos escoger uno con un eje paralelo al plano de la nieve y el otro eje perpendicular al anterior. Si tomamos sen 10 = 0,17; cos 10 = 0,98, el peso se podrá expresar como:

$$\boldsymbol{F}_{\text{Tierra,e}} = -\,117\,\boldsymbol{i} - 672\,\boldsymbol{j} \text{ N}$$

Al existir equilibrio en el eje *Y* ya que no existe aceleración en esa dirección, la fuerza normal (la que ejerce la nieve sobre el esquiador) debe ser igual en módulo a la componente del peso en esa dirección:

$$\Sigma \boldsymbol{F}_y = 0;\ \boldsymbol{F}_{\text{nieve,e}} - 672\,\boldsymbol{j} = 0;\quad \boldsymbol{F}_{\text{nieve,e}} = 672\,\boldsymbol{j}$$



b) Para poder calcular la rapidez del esquiador es necesario conocer la aceleración. Ésta se puede calcular a partir de la segunda ley de la dinámica, para lo que debemos saber previamente la sumade todas las fuerzas que actúan sobre el esquiador. Además de las ya descritas, sobre el esquiador actúa la fuerza de rozamiento nieve-esquíes, que al estar el esquiador en movimiento toma el valor máximo posible. Ese valor es 0,1·672 = 67,2 N. Teniendo en cuenta la dirección y sentido de esa fuerza, la podemos expresar vectorialmente como 67,2 $\boldsymbol{i}$ N. La suma de todas las fuerzas se reduce a la suma de las componentes en el eje X, ya que en el eje Y es nula:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \Sigma \boldsymbol{F}_x = -117\,\boldsymbol{i} + 67{,}2\,\boldsymbol{i} = -49{,}8\,\boldsymbol{i}\ \text{N}$$

La aceleración del esquiador es sólo tangencial: $\boldsymbol{a} = -49{,}8\,\boldsymbol{i} / 70 = -0{,}72\,\boldsymbol{i}\ \text{m/s}^2$

Ahora se plantean las ecuaciones del movimiento. Si suponemos el punto de referencia en la posición en la que comienza a deslizarse y seguimos utilizando el mismo criterio de signos:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(-0{,}72)\,t^2 \\ v &= (-0{,}72)\,t \end{aligned}\right\}$$

Cuando ha recorrido 100 m, su posición es $e = -100$ m, y aplicando la ecuación de la posición obtenemos el instante en el que se encuentra en esa posición:

$$-100 = -\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}72\, t^2;\ t = 16{,}7\ \text{s}$$

La rapidez será: $v = -0{,}72 \cdot 16{,}7 = -12{,}0$ m/s

c) Al llegar a la pista horizontal, la fuerza que hace la nieve sobre el esquiador compensa exactamente la fuerza de atracción de la Tierra. Por lo tanto, la suma de todas las fuerzas sobre el esquiador es la fuerza de rozamiento, de módulo:

$$F_{roz} = 0{,}1 \cdot 686 = 68{,}6\ \text{N}$$

Pues ahora la fuerza normal tiene el mismo valor que el peso.

La aceleración tomará ahora el valor:

$$\boldsymbol{a} = 68{,}6\,\boldsymbol{i}\,/\,70 = 0{,}98\,\boldsymbol{i} \text{ m/s}^2$$

Las ecuaciones del movimiento, si tomamos como punto de referencia el comienzo de la pista horizontal y mantenemos el mismo criterio de signos serán:

$$\left.\begin{aligned} e &= -12{,}0\,t + \frac{1}{2}\,0{,}98\,t^2 \\ v &= -\,12{,}0 + 0{,}98\,t \end{aligned}\right\}$$

Aplicando estas ecuaciones para el valor final de rapidez nulo, obtendremos la posición final del esquiador:

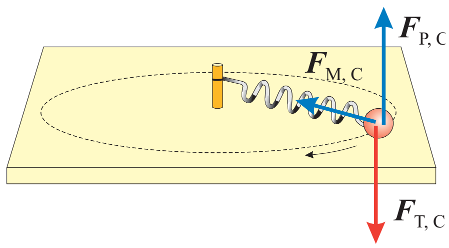
$$0 = -12{,}0 + 0{,}98\,t;\ t = 12{,}24 \text{ s}$$

$$e = -12{,}0 \cdot 12{,}24 + 0{,}49 \cdot 12{,}24^2 = -73{,}5 \text{ m}$$

Tal como hemos escogido el punto de referencia, si hemos pasado de la posición 0 a la posición – 73,5 m, la distancia recorrida en la pista horizontal antes de pararse habrá sido de 73,5 metros.

En ningún caso hemos tenido en cuenta el rozamiento con el aire que frena al esquiador. Tampoco se ha tenido en cuenta la posición en la que coloque los esquíes que le puede servir para frenar antes.

15. Si el rozamiento es despreciable y el peso del cuerpo es equilibrado por la fuerza que hace el plano sobre él, la única interacción que producirá aceleración en el cuerpo (en este caso varía la dirección de su velocidad continuamente) es la que se produce entre el muelle y el cuerpo. Esta fuerza estará dirigida hacia el centro en la dirección normal a la trayectoria, condición necesaria para que exista el movimiento circular uniforme. Para que el muelle tire del cuerpo hacia el centro debe estar estirado y así ejercerá sobre el cuerpo una fuerza proporcional al alargamiento que ha sufrido: $F_{M,C} = k\,\Delta l$. Como la componente normal de la fuerza la podemos expresar como $F_n = mv^2/r = m\,\omega^2\,r$, al igualar ambas expresiones obtendremos una ecuación de la que podemos obtener el alargamiento o deformación producida en el muelle:



$$k\,\Delta l = m\,\omega^2\,r$$

$$10\,000 \cdot \Delta l = 2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}5 = 100$$

$$\Delta l = 100/10000 = 0{,}01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$